中学生科技创新后备人才培养计划项目

**学生研究论文**

|  |  |
| --- | --- |
| 论文名称： | Ramsey问题的扩展研究 |
| 学生姓名： | 陈思佑 |
| 指导教师： | 吕长虹，袁龙图 |
| 所在学校： | 上海市平和双语学校 |

2023 年 10 月

**Ramsey问题的扩展研究**

**摘 要**

Ramsey定理由英国数学家Ramsey提出，是图论中的一个重要问题。经典Ramsey问题是指对一个有n个顶点的完全图进行双色染色，即以两种颜色对所有线段分别进行染色，使得每条边都被染上这两种颜色的其一，Ramsey定理认为在对一个足够大的完全图染色后，一定能在其中找到较小的单色图。Ramsey定理表明在无序中总能确认有序的部分，这个想法在众多领域都有着重大意义。

但Ramsey数的确定却一直是个未解的难题，学者们一直试图找到求Ramsey数的一个通用方法，但目前为止，距离确认Ramsey数的精确值还差了很远。关于其上界与下界的求法较多样，学者们近年来不断在缩小着界线的范围。

本文中首先将介绍经典Ramsey数两种上界的求法与一种下界的求法，之后，本文将对经典染色问题进行变化、扩展：增加考虑一条边可以同时染上两种颜色，然后采用与经典Ramsey数相似的方式求出变化Ramsey数的上界与下界。

关键词：Ramsey定理，Ramsey数，变化Ramsey数，上界，下界，染色，扩展

**ABSTRACT**

Ramsey’s theorem was proposed by the British mathematician Ramsey and is an important theorem in graph theory. The classical Ramsey problem consists of the monochromic coloring of a complete graph with n vertices, by coloring all line segments separately in two colors so that each edge is colored with one of these two colors. Ramsey’s theorem states that after coloring a sufficiently large complete graph, a smaller monochromatic graph must be found in it. Ramsey's theorem suggests that order can always be found within disorder, an idea that has great significance in numerous fields.

However, determining the exact value of Ramsey numbers has been an unsolved problem. Scholars have been trying to find a general method to find Ramsey numbers, but so far, it is still far from confirming the exact value of Ramsey numbers. There are many different ways to find the upper and lower bounds of Ramsey numbers, and scholars have been trying to narrow down the scope of the bounds in recent years.

In this paper, I will first introduce two methods to find upper bounds and one method to find lower bounds in classical Ramsey numbers. Then, I will change and extend the classical coloring problem: I will add into consideration that an edge could be colored with two colors at the same time. I will use a similar method to that of finding classical Ramsey numbers to find out the upper bounds and lower bounds of the varied Ramsey numbers.

Key words: Ramsey theorem, Ramsey numbers, varied Ramsey numbers, upper bound, lower bound, coloring, extension

目录

[1 绪论 4](#_Toc149335014)

[1.1 研究背景与意义 4](#_Toc149335015)

[1.2 学术界研究进展简介 4](#_Toc149335016)

[1.3 本文研究方法及对象 5](#_Toc149335017)

[2 引入Ramsey问题 5](#_Toc149335018)

[3 经典Ramsey数上下界研究综述 6](#_Toc149335019)

[3.1 Ramsey数的上界 6](#_Toc149335020)

[3.2 Ramsey数的下界 7](#_Toc149335021)

[4 扩展研究：变化Ramsey数的上界与下界探讨 8](#_Toc149335022)

[4.1 变化Ramsey数的上界 8](#_Toc149335023)

[4.2 变化Ramsey数的下界 9](#_Toc149335024)

[5 结论与展望 10](#_Toc149335025)

[参考文献 11](#_Toc149335026)

[致谢 12](#_Toc149335027)

Ramsey问题的扩展研究

# 1 绪论

## 1.1 研究背景与意义

Ramsey定理由英国数学家Ramsey提出。1930年，Ramsey在英国杂志 《伦敦数学协会成果发展》上发表了一篇论文，其中提到了一个组合方面的定理，也就是Ramsey定理。定理提到，对任意给定的自然数n、k及 q1, q2……qk ≥ 2，都存在数r(q1, q2, ……, qk)。当r ≥ r(q1, q2, ……, qk)时，对1, 2, …, r 的所有n元子集任一种k染色，必有一个i (1, 2, …, k)使得(1, 2, …, r)中包含有一个qi元子集，它的所有n元子集都是同一颜色的。对于Ramsey数的上下界研究能够直观的反映无序集中有序集出现的频率与大小。Ramsey问题由此提出，对于这些有序的qi元子集，多大的随机无序集合能够保证它们的存在？其中，qi的Ramsey数便是r，也就是总集合的大小。

该理论揭示了数学结构的一种特质，即无序中也会出现有序[1]；每一种无序的结构，只要它足够大，就一定会包含一个有序的结构，这便是Ramsey问题的本质。也就是说，拉姆齐理论关注的是这样一个基本问题：我们能否在混沌中找到秩序？近一个世纪以来，拉姆齐数受到数学家们的广泛关注，成为图论的重要概念之一，在组合数学中也占据重要位置。

多年来，数学家们始终未找到求解拉姆齐数的有效方法。相关研究主要集中在求某些特定的Ramsey数的上界和下界。在研究方法方面，越来越多的组合数学以外的数学工具、甚至计算机算法等被应用到拉姆齐数的研究中来。并有学者将其应用到泛函分析、通信信息、信息检索等领域。

## 1.2 学术界研究进展简介

尽管自拉姆齐定理提出已接近一个世纪，但有关研究的进展却并不顺利。拉姆齐定理解决了拉姆齐数的存在性问题，但拉姆齐数的求解方法始终是组合数学的未解之谜。

针对经典双色Ramsey问题，1935年Paul Erdos和George Szekeres提出了通过确定上界与下界来计算拉姆齐数的思路[2]。他们得出对于给定数字k，其拉姆齐数的上界是4k。1947年Erdos计算出下界为。1974年Joel Spencer采用概率方法提高了下界值，后来别的科学家又将上界的值被缩小至。

之后的几十年中，学者们一直试图缩小上下界的范围，但进展较慢，直到2023年2月，Marcelo Campos等四位数学家将Ramsey数的上界缩小到了。

上述进展将在本文第三章进行较为详细的介绍。

## 1.3 本文研究方法及对象

本文中将会提到经典拉姆齐数两种上界的求法与一种下界的求法，并对这一染色问题进行衍生探讨，增加考虑一条边可以同时染上两种颜色的可能性，以与原Ramsey数相似的方式求出其大小的上界与下界。

# 2 引入Ramsey问题

原Ramsey问题以图论的形式可表现为一张图内多个点之间两两连线，一共可以连两种线，即在两种线当中二选一连接两个点。以经典双色拉姆齐数最常见的比喻为例：任何6个人的聚会，其中总会有3人互相认识或者3人互相不认识。本研究在此基础上可在两个点之间同时用两种线连接，也就是两点之间可以有三种不同的连法。

一些较小的Ramsey数是有已知的值的，例如r(3)=6，r(4)=18等。这些较小的数求法相对简单，如r(3, 4)可以由r(3, 3)和r(2, 4)求得。已知r(3, 3)=6，那么6点中必有3点形成红色或蓝色完全图，因此一个点最多能与5个点连蓝线才能保证不超出r(3, 4)的限制。同理，r(2, 4)=4，那么这个点最多能与3个点连红线保证不超出r(3, 4)的限制。包含这个点在内，1+3+5共9个点一定能够确保达到r(3, 4)条件，然而8个点能够列举出一种特定的连接方式使得达不到r(3, 4)条件，因此r(3, 4)的值可以确定为9。

这种列举方式随着r内的数字增大而指数型增长，当达到5时就已经无法用当前的技术算出来了，只知道r(5)的值位于43与47之间。因此5以上的Ramsey数的确认需要以确定上界与下界的方式来缩小范围，而Ramsey问题中上界与下界的确定是一个较为复杂的过程。

# 3 经典Ramsey数上下界研究综述

## 3.1 Ramsey数的上界

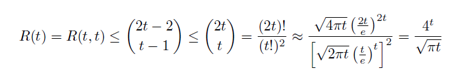
Ramsey数的上界目前已经被缩小至，但此证明较为复杂，这里先介绍较为简单的r(n)小于的证明。

r(n)仅是在r(a, b)中a与b相同都为n时的缩写，将其展开为r(a, b)，第一个数a表示组成一种单色团所需的顶点数，而第二个数b表示组成另一种单色团所需的顶点数。在已知r(a-1, b)与r(a, b-1)的值的情况下，我们能够用递推的方法求出r(a, b)的值[3]。我们可以从Ramsey问题中最初始的问题出发以证明这一点。

r(a, b)代表的是能够使得一定会出现a人互相认识或是b人互相不认识的最小总人数。选中随机一人，与此人认识的人数不能达到r(a-1, b)，否则这些人当中如果出现a-1人互相认识，则与此人形成a人互相认识的关系；如果这些人中出现b人互相不认识，则显然也会有b人互相不认识的关系。同理，与此人不认识的人数不能达到r(a, b-1)。

因此在知道r(a-1, b)与 r(a, b-1)的条件下，得知r(a, b) r(a-1, b)-1+ r(a, b-1)-1+1= r(a-1, b)+ r(a, b-1)-1。由于r(2, b)=b，r(a, 2)=a，在a+b值相同的情况下a与b差值越大，r(a+1, b)或r(a, b+1)的增长速度越慢，因此r(n-1, n+1)总是小于r(n, n)，r(a-1, b)与r(a, b-1)都小于2\* r(a-1, b-1)，r(a, b)也就小于4\* r(a-1, b-1)。当a与b相同时，算式可简化为r(n) < 4\*r(n-1)，而在n=2时，r(2)=2<，也就证明了r(n)的上界为。

Ramsey数的上界还有一个小一些的界线，也就是。证明流程约为如下：



流程中的t与本文中的n等价，首先将r(t)展开为r(t, t)，然后根据定理1（如下），r(t, t)，为了使后面的运算更加方便，将增加至，以阶乘将其拆解为。根据斯特林公式，将式子中的两个阶乘分别拆解，能够得到这样一个较为复杂的式子。将这个式子拆开化简就得到了这一个更为精确的上界。

定理1：首先假设r(s, t) 。根据数学归纳法[5]，先假设r(s, t)中s, t中一个数为2，那么r(2, t)就等于t，因为要么是一个蓝色的t个点的完全图，要么存在一条红边，也就满足了前面的2。由此，当r(s, t-1)与r(s-1, t)的上界都已经得到后，可以得到r(s, t) +=，也就证明了假设。

斯特林公式：[6]

## 3.2 Ramsey数的下界

Ramsey数的下界目前被粗略估计为，与上界不同，下界的值是由概率论证明的。

假设一个完全图含有k个点，需要在其中能够确保找出一个n个点之间的同色完全图，即这n个点之间全部由同一种线连接。这n个点之间总共可以连条线，在每条线都以每种线1/2的概率独立出现的条件下，这条线颜色全部相同的概率则为2\*。这一整个含有k个点的完全图当中，一共有种方法选出n个点，因此在这k个点的完全图中，有n个点之间的同色完全图的概率可表现为\*[7]。

如果能够使这一概率严格小于1，那么就可以证明一定有至少一种着色方法使得n个点之间的同色完全图不存在，也就证明了这一k的取值不足以达到n的Ramsey数[8]。由此，我们可以列出不等式\*。将Ramsey数的下界，也就是k=代入不等式，经过计算可以得到

\*\*/n! < \*=1，

也就证明了一定小于n的Ramsey数。

# 4 扩展研究：变化Ramsey数的上界与下界探讨

## 4.1 变化Ramsey数的上界

关于本文中所研究的衍生问题，这里暂且称其为变化Ramsey数，写作r’(n)。同样将变化Ramsey数的上界展开为r’(a, b)，第一个数a表示组成一种单色团所需的顶点数，而第二个数b表示组成另一种单色团所需的顶点数。如果不对r’(a, b)进行限制的话，那么其上限就会与r(a, b)完全没有区别，因为可以强制不出现双线连接的情况。因此，这里将首先对其进行简单的限制，也就是一个人不能同时与另外两个不同的人连接双线。

举个例子，假设一群学生当中两两直接都存在数学相关或是物理相关，且每两人之间都至少有其中一种关系。现在要在这群学生当中选取一部分参加数学或是物理竞赛的其一，且必须保证这一部分学生两两之间都存在这一竞赛学科相关。当每两人之间都存在正好一种关系，也就是没有两人之间既数学相关又物理相关时，这个问题就与原Ramsey问题完全一致了。而当两人之间能够同时存在数学相关与物理相关时，此问题便成为了变化Ramsey问题。

举一个更加具体的例子，一群学生当中存在一对学生之间既数学相关又物理相关，求这群学生最小要有多少人才能够保证一定能够找到三人参加物理竞赛，或是找到三人参加数学竞赛。这个例子与r’(3, 3)是完全相同的，其证明也较为简单，可以用反证法得到。围绕既数学相关又物理相关的两人的其中一个分析其关系，这个人至多能与两人数学相关：否则如果与三个人同时数学相关，那么这三个人互相之间不能有任何一对数学相关，否则就会与这个人组成三人互相的数学相关，但反之则会出现这三人互相之间物理相关。同理，这个人也至多能与两人物理相关，否则也会形成三人的数学小组或是三人的物理小组。而在这个人的关系当中，有一个人既和他数学相关又和他物理相关，因此真正能与他产生任意一种关系的人至多只有三个，也就是说在总共4人的情况下，可以使得无三人互相数学相关或物理相关。因此，r’(3, 3)的值为5，也就是在共有5人的情况下，必定能够找到三人数学相关或三人物理相关。

首先假设原本存在的少量顶点当中不存在双线连接的情况，然后新的顶点加入，并使其与原本存在的一个顶点之间双线连接。由于一个顶点只能与另外一个顶点双线连接，我们可以将另一个顶点直接放入红色与蓝色的集合内。新放入的顶点至多能与r’(a-1, b)-1个顶点连接红线，与r’(a, b-1)-1个顶点连接蓝线，因此加入一个双线连接的点后，新的完全图的大小将不会超过r’(a-1, b)与r’(a, b-1)的和。

与r(a, b)的计算相同，r’(a, b)的上界也同样为r’(a-1, b)与r’(a, b-1)的和，但由于必须有一对双线连接的点，因此r’(a, 2)与r’(2, b) 的值一直为2，与a、b的值无关。同时，当a-1或b-1不超过2时，无法满足定义中一个顶点不能与同时与两个其他顶点双线连接的条件，因此r’(3, 3)，r’(3, 4)与r’(4, 3)的值可以由r的值减一得到。这两个条件构成了变化与经典拉姆齐数上界计算的细小差别，通过计算可得到r’(4)的值为16，而之后r’(n)增加的速度同样不超过4，因此可得到当4n时，r’(n)的上界为。

## 4.2 变化Ramsey数的下界

其下界求法与原Ramsey数的下界求法较为类似，同样是由概率论得到的。

假设一个完全图含有k个点，需要在其中能够确保找出一个n个点之间的同色完全图，即这n个点之间全部存在同一种线的连接。这n个点之间总共可以连条线，由于每两个点之间都独立存在三种连接情况，即蓝线，红线与双线，每条线的出现概率都为2/3。因此这条线颜色全部相同的概率则为2\*。这一整个含有k个点的完全图当中，一共有种方法选出n个点，因此在这k个点的完全图中，有n个点之间的同色完全图的概率可表现为\*2\*。同样地，如果能够使这一概率严格小于1，那么就可以证明一定有至少一种着色方法使得n个点之间的同色完全图不存在，也就证明了这一k的取值不足以达到n的变种Ramsey数。由此，我们可以列出不等式\*2\*。将由Ramsey数的下界类比而来的变种Ramsey数的下界k=代入不等式，经过计算可以得到

\*2\*\* < \*=1，

也就证明了一定小于n的变化Ramsey数。

# 5 结论与展望

本文提及较小的Ramsey数有准确的值，但较大的数只能由上界与下界框定范围。Ramsey数r(n)的上界有最初的与精确一些的，下界为；其变化数的上界为下界为。目前的结论仅有这些，但变化的上界求法与Ramsey数上界的求法相似，较不精确，未来我将会探索与或是求法类似的变化求法，希望能够得到更加准确，范围较小的结论。

# 参考文献

[1] 许胤龙，孙淑玲.组合数学引论第二版[M].上海：中国科技技术大学出版社，2010.4：14-21

[2] 斯勤夫，段禅伦.(3,11,45)-Ramsey图的递阶构造(英文)[J].内蒙古大学学报：自然科学版,2005,36(4):383-386

[3] Weisstein, Eric W. "Stirling's Approximation." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/StirlingsApproximation.html>

[4] 黄益如.两个Ramsey数上界公式的统一与改进[J].上海大学学报：自然科学版,2003,9(1):61-62

[5] 王清贤. Ramsey数在计算机科学中的应用.信息工程学院学报,1997,16(1):1-5

[6] Alon N and Orlitsky A. Repeated Communication and Ramsey Graphs. IEEE Transactions on Information Theory,1995,41(5):1276-1289

[7] M. Campos, S. Griffiths, R. Morris, and ], Sahasrabudhe, An exponential improvement for diagonal Ramsey. arXiv:2303.095211.(2023).

[8] Joel Spencer. A New Lower Bound. Journal of Combinatorial Theory(A).1975.(108-125)

# 致谢

首先，非常感谢吕长虹老师指导团队对我的悉心培养，带领我体验并完成了一个完整的科研过程。

我尤其要感谢袁龙图老师在本次研究过程中给予我的专业指导，在决定研究课题之初，袁老师带着我花了大量时间学习和了解关于Ramsey数的相关课题，总结当前研究的主要成果，探讨可能的研究拓展方向，以此启发我确定了本次的课题和研究方向。在整个研究过程中，袁老师多次抽空与我沟通项目的进展情况，在我遇到困难时，提醒我“科研是探索未知”，保护和激励我的探索精神，并对我的论文提出了一针见血的意见和建议，我非常感激他。

最终，我本人独立完成了本次研究课题，并基于研究的过程和得出的结论，独立完成了全文的撰写工作。